Сызықты теңдеулер жүйесі және оларды шешу әдістері. .

1. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Анықтама 1. n белгісізі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі деп мына түрде берілген жүйені айтамыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

мұндағы a_{ik}, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$ - жүйенің коэффициенттері , ал b_i, $i=\overline{1,m}$ - бос мүшелер, x_i, $i=\overline{1,n}$ - белгісіздер.

2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сандары (1) жүйесінің шешімдері деп аталады, егер бұл сандарды теңдеудегі сәйкес белгісіздердің орнына қойғанда, осы жүйедегі тепе-теңдіктер орындалса.

3. (1) жүйесі үйлесімді деп аталады, егер оның тым болмағанда бір шешімі табылса, кері жағдайда жүйе үйлесімсіз деп аталады.

4. Үйлесімді (1) жүйесінің тек бір ғана шешімдері табылса, онда жүйе анықталған деп аталады, кері жағдайда жүйе анықталмаған деп аталады.

5. Егер $b_i = 0, \quad i = \overline{1, m}$, онда (1) жүйесін біртектес теңдеулер жүйесі деп атаймыз.

1-ші лекциядағы айтылғандарды ескерсек, (1) жүйесін матрицалық түрде былай жазуға болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Кронекер-Капелли теоремасы.

(1) жүйесі үйлесімді болуы үшін $r(A)=r(\overline{A})$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- (2) жүйесінің кеңейтілген матрицасы деп аталады.

(1) теңдеулер жүйесінің әрбір теңдеуі осы теңдеудің коэффицентерімен бірмәнді анықталатындықтан, $\overline{A}$ матрицасының жолдарын вектордың координаталары ретінде қарастыра отырып, $r(\overline{A})$ - (1) жүйесінің сызықтық тәуелсіз теңдеулер санына тең болатындығына көз жеткіземіз .

Салдар 1. (1) жүйесі анықталған болады сонда және тек қана сонда ғана, егер $r(A)=r(\overline{A})=n$, мұндағы n - белгісіздер саны.

Салдар 2. $r(A)=r(\overline{A})<n$ (1) жүйенің шексіз көп шешімі бар (жүйе анықталмаған)

Салдар 3. $r(A)<r(\overline{A})$ (1) жүйенің шешімі жоқ (үйлесімсіз)

$m=n$ және $\det A=\Delta\neq 0$ жағдайын қарастыралық. Онда салдар 1 бойынша (1) жүйесі анықталған және осы теңдеулер жүйесін шешу үшін келесі әдістерді қарастырамыз.

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері.

1.Крамер ережесі.

n белгісізі бар және n сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін, яғни теңдеулер саны белгісіздер санына сәйкес келеді.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (3)$$

Мұндай жүйені шешу үшін Крамер ережесін қолдануға болады. Біз оны үш белгісіз үш теңдеулер жүйесінің мысалында сипаттаймыз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (4)$$

Төрт детерминантты есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Δ жүйесінің негізгі детерминанты белгісіз коэффициенттерден тұрады.

Әрі қарай үш жағдай болуы мүмкін:

1. Егер $\Delta \neq 0$, онда (4) жүйесінің шешімдері мынадай формула арқылы анықталады: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1,3}$, мұндағы Δ_i, $i = \overline{1,3}$ - Δ анықтауыштағы i-ші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар;

2. Егер $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$. Сонда жүйеде шексіз шешімдер болуы мүмкін;

3. Егер $\Delta = 0$ ал Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} анықтауыштарының кемінде біреуі 0-ден өзгеше болса, онда сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді немесе үйлесімсіз, шексіз көп шешімі бар немесе шешімі жоқ.

1. Мысал.

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1. \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

сызықты теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу.

Шешуі. Жүйенің анықтауышн есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0 \Rightarrow$$ ендеше жүйенің жалғыз шешімі бар.

Крамер формуласын қолданамыз:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

Жүйенің шешімі:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Жауабы: $x = 1,\ y = 1,\ z = 1.$

2. Матрицалық әдіс.

Бұл әдіс теңдеулер саны белгісіздер санына сәйкес келетін жүйелерді шешу үшін де қолданылады. (4) жүйе орнатылсын. Біз оны матрицалық түрде жазамыз.

$$A \cdot X = B$$

Егер А матрицасы айрықша емес болса, яғни, жүйенің матрицасы 0-ден өзгеше болса, онда А матрицасына кері матрица A^{-1} бар болады. Теңдеудің екі жағын сол жағынан A^{-1} көбейтіп, жүйенің шешімін матрицалық түрде аламыз:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (5)$$

2 Мысал. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 \quad = -3 \end{cases}$, сызықты теңдеулер жүйесін кері матрица әдісімен шешу.

Шешуі. Сызықты теңдеулер жүйесін $A \cdot X = B$ матрицалық түрде жазайық:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Жүйенің А матрицасының анықтауышын есептейік:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$.

Онда А матрицасына кері матрица A^{-1}бар болады және оны формуламен анықтаймыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=5,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-13,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7\end{pmatrix}.$$ - кері матрица

Жүйенің шешімі (5) формула бойынша:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 6\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

3. Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі). Элементар түрлендірулерді қолданып (1) жүйесін өзіне эквивалентті болатын диагоналдық жүйеге келтіреміз

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_1 + \ldots + a'_{2,n-1}x_{n-1} + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = b'_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a'_{n,n}x_n = b'_n \end{cases} \qquad (6)$$

одан кейін ең соңғы теңдеуден бастап біртіндеп жоғарылай отырып белгісіздерді анықтаймыз.

3) *Гаусс әдісі.* Бірінші және екінші теңдеулердің орнын ауыстырамыз

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - 4x_2 \qquad = -5 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз. Енді, бірінші теңдеуді (–1)-ге көбейтіп, үшінші жолға қосамыз. Сонымен, біз екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \quad -8x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Екінші жолды $(-\frac{2}{11})$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз. Сөйтіп, үшінші теңдеудегі x_2 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \dfrac{2}{11}x_3 = -\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Енді төменнен жоғары қарай біртіндеп белгісіздерді табалық: үшінші теңдеуді шешіп $x_3 = -2$, табылған $x_3 = -2$ мәнін екінші теңдеуге қойып, шешсек $x_2 = 1$. Табылған $x_3 = -2$, $x_2 = 1$ мәндерін бірінші теңдеуге қойсақ , $x_1 = -1$ болады.

Жалпы шешім туралы ұғым

Жалпы жағдайды қарастырамыз, жүйедегі теңдеулер саны белгісіздер санымен тең емес және $r(A) = r(\overline{A}) < n$.

Онда біз былай жаза аламыз

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7)$$

(7)-тен шығатыны, соңғы $m-r$ теңдеуді алғашқы r теңдеудің сызықтық комбинациясы ретінде жаза аламыз. Соңғы $m-r$ теңдеуді жүйеден алып тастап, ал қалған теңдеулердегі $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ белгісіздерін теңдіктің оң жағына шығара отырып, (1) жүйеге эквивалентті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{r,n}x_n
\end{cases}
\qquad (8)
$$

мұндағы $x_1, x_2, \ldots, x_r$ айнымалылары базистік айнымалылар деп аталады, ал $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ айнымалылары еркін айнымалылар деп аталады. (7)-тен, егер $x_1, x_2, \ldots, x_r$ айнымалыларын ғана белгісіздер деп алатын болсақ, онда (8) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар екендігі шығады және $x_1, x_2, \ldots, x_r$ белгісіздерін еркін белгісіздер арқылы өрнектей аламыз. (8) жүйесінің шешімін, яғни базистік айнымалылардың еркін айнымалылар арқылы өрнектелуін (1) жүйесінің жалпы шешімі деп атаймыз.

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі

Мынадай сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық

$$AX = 0 \qquad (9)$$

(9) теңдеулер жүйесі үнемі үйлесімді болатыны анық, себебі оның тривиалды шешімі $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ бар. Салдар 1-ден (9) теңдеулер жүйесінің нөлге тең емес шешімдері болуы үшін, $r(A) < n$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті екендігі шығады.